Lycée Louis Vincent
C. Scholl

TSI1 - 2024/2025
Mathématiques

Chapitre 18 : Applications linéaires
Projecteurs et symétries

1 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1. (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires (ou que E_1 est un supplémentaire de E_2) si tout vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ s'écrit de manière unique

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \text{ avec } \overrightarrow{x}_1 \in E_1 \text{ et } \overrightarrow{x}_2 \in E_2.$$

Cette propriété se note $E = E_1 \oplus E_2$.

Proposition 1. *(Caractérisation des supplémentaires)*

$$E = E_1 \oplus E_2 \Longleftrightarrow E = E_1 + E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

Exemple 1.

1. $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1,0,0)) \oplus \text{Vect}\left((1,1,0),(1,1,1)\right).$
2. $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X) \oplus \text{Vect}(1 + X + X^2).$
3. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$
4. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ paires}\} \oplus \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ impaires}\}.$

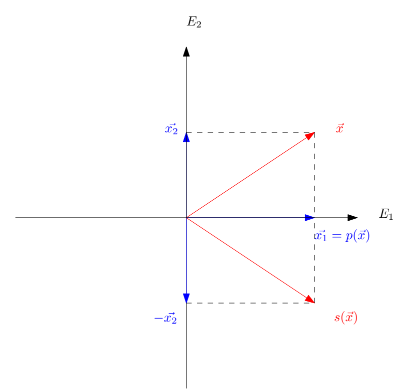
2 Projecteurs

Dans ce paragraphe, $E = E_1 \oplus E_2$. Tout vecteur de $x \in E$ s'écrit de manière unique :

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{avec } x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2.$$

Définition 2. On appelle projecteur sur E_1 de direction E_2 l'endomorphisme p défini par

$$p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}.$$



Remarque. 1. $\text{Ker}(p) = E_2$ et $\text{Im}(p) = E_1$.

2. Pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$, $p(p(x)) = p(x_1) = x_1 = p(x)$. Ainsi $p \circ p = p$.

Théorème 1. (Caractérisation des projecteurs)
Soit $p : E \to E$ une application.

$$p \text{ est un projecteur } \iff (p \text{ est linéaire et } p \circ p = p).$$

Dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ de direction $\mathrm{Ker}(p)$.

Matrice de p dans une base adaptée. Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5})$ une base de E telle $E_1 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5})$. Déterminer la matrice de p, projecteur sur E_1 de direction E_2, dans la base $\mathscr{B}$.

3 Symétries

Définition 3. On appelle symétrie par rapport à E_1 de direction E_2 l'endomorphisme s défini par

$$s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}.$$

Remarque. 1. Pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$,

$$\begin{aligned} s(s(x)) &= s(x_1 - x_2) \\ &= x_1 - (-x_2) \\ &= x_1 + x_2 \\ &= x. \end{aligned}$$

Ainsi $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

2. Que vaut $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$?

3. Que vaut $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$?

Théorème 2. (Caractérisation des symétries)
Soit $s : E \to E$ une application.

$$s \text{ est une symétrie si et seulement si } (s \text{ est linéaire et } s \circ s = \mathrm{Id}_E).$$

Dans ce cas, $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ de direction $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Relation entre s et p Soient p le projecteur sur E_1 de direction E_2 et s la symétrie par rapport à E_1 de direction E_2. On a

$$\forall x \in E, \quad s(x) = 2p(x) - x,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{s = 2p - \mathrm{Id}_E.}$$

Matrice de s dans une base adaptée. Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5})$ une base de E telle $E_1 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_5})$. Déterminer la matrice de s, symétrie par rapport à E_1 de direction E_2, dans la base $\mathscr{B}$.